

# 一类混合型三重细分法

黄丙耀, 檀结庆

(合肥工业大学数学学院, 安徽合肥 230601)

**摘要:** 文章从几何的视角出发, 以四点二重插值细分格式的几何解释为基础, 对四点三重插值细分格式的几何意义进行分析, 改造格式使其融合逼近细分, 进而得到一类带参数的混合型三重细分格式. 诸多已有的插值型细分和逼近型细分都是该格式的特例, 采用生成多项式方法分析了其  $C^k$  连续性. 得到了一种新的  $C^4$  连续五点三重曲线细分格式. 数值实例表明, 利用提出的混合型细分法通过参数的适当选取可以实现对极限曲线的形状控制.

**关键词:** 三重细分法; 混合型; 插值细分; 逼近细分;  $C^k$  连续性

**中图分类号:** TP391.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2021)01-0090-09

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.12263/DZXB.20180816

## A Blending Ternary Subdivision Scheme

HUANG Bing-yao, TAN Jie-qing

(School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei, Anhui 230601, China)

**Abstract:** From the perspective of geometry, based on the geometric interpretation of the four-point binary interpolating subdivision scheme, this paper analyzes the geometric meaning of the four-point ternary interpolating subdivision scheme, and modify the scheme to combine approximating subdivision; then a blending ternary subdivision scheme with parameters is obtained. Many existing interpolating subdivision schemes and approximating subdivision schemes can be seen as special cases of this scheme. We also use generating polynomial method to analyze the  $C^k$  continuity of limit curve produced by the blending subdivision. A new  $C^4$  continuous five-point ternary curve subdivision scheme is obtained. Numerical examples show that the proposed blending subdivision scheme can be used to control the shape of limit curves by selecting appropriate parameters.

**Key words:** ternary subdivision scheme; blending; interpolating subdivision; approximating subdivision;  $C^k$  continuity

### 1 引言

细分方法近些年已成为计算机辅助几何设计、计算机图形学<sup>[1]</sup>等领域的一项重要研究内容, 由于它算法简单且易于实现, 被广泛应用于三维模型的多分辨率表示、计算机动画、几何造型<sup>[2,3]</sup>.

细分按照极限曲线是否经过初始控制顶点分成两类: 插值型细分和逼近型细分. 插值型细分方便形状控制, Dyn 等<sup>[4]</sup>提出经典的四点插值细分法, 给出了几何解释, 并证明了生成的极限曲线是  $C^1$  连续的. 二重细分的相关理论被推广到三重细分上. Hassan 等<sup>[5]</sup>构造了  $C^2$  连续四点三重插值细分格式. Deslauriers 和 Dubuc<sup>[6]</sup>利用插值多项式得到  $2n$  点  $b$  重细分法. Deng 等<sup>[7]</sup>提出一种统一的插值细分法, 对  $2n$  点插值细分法通过重复

局部操作来实现. 另一方面, 逼近型细分可以达到高阶连续, Hassan 等<sup>[8]</sup>构造了三点三重逼近细分格式, Siddiqi 等<sup>[9]</sup>提出了极限曲线可以达到  $C^6$  连续的逼近细分格式. 然而, 存在一类带参数的混合型细分格式, 通过参数的不同取值, 该细分既可以成为插值型细分又可以成为逼近型细分. 郑红婵等<sup>[10]</sup>将单参数的四点插值细分法扩展为双参数四点二重细分法, 既能造型光滑插值曲线, 又能造型光滑逼近曲线. Pan 等<sup>[11]</sup>利用松弛技术将插值型细分和逼近型细分相结合, 构造了一类  $C^2$  连续的插值与逼近相结合的细分格式. 檀结庆等<sup>[12]</sup>对插值细分法引入偏移变量, 提出了基于插值细分的逼近细分法. Rehan 等<sup>[13]</sup>给出了组合型四点三重细分格式. Novara 等<sup>[14]</sup>对组合型四点三重细分  $C^2$  和  $C^3$  收敛的范围进行了完整的描述.

本文从几何的角度设计了带参数的混合型三重细分格式,诸多已有的插值型细分格式和逼近型细分格式都可以成为该格式的特例.并提出一种新的五点三重曲线细分格式,证明了其极限曲线可以达到  $C^4$  连续.

## 2 预备知识

给定初始控制顶点集  $P^0 = \{p_j^0 \in \mathbb{R}^d \mid j \in \mathbb{Z}\}$ , 设  $P^k = \{p_j^k \in \mathbb{R}^d \mid j \in \mathbb{Z}\}$  为第  $k (k \geq 0, k \in \mathbb{Z})$  次细分后的控制顶点集, 则三重细分格式可定义为:

$$p_i^{k+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-3j} p_j^k, \quad i \in \mathbb{Z}$$

其中  $a = \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$  称为掩模.

若将定义的细分格式记为  $S$ , 则  $S$  的生成多项式为

$$a(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i z^i.$$

**定理 1**<sup>[15]</sup> 若三重细分格式  $S$  一致收敛, 则其掩模  $a = \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$  满足:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{3i} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{3i+1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{3i+2} = 1 \quad (1)$$

**定理 2**<sup>[5]</sup> 若三重细分格式  $S$  的掩模满足式(1), 则存在一个细分格式  $S_1$  (称为  $S$  的一阶差商细分格式) 满足:

$$dP^k = S_1 dP^{k-1}$$

其中,  $P^k = S^k P^0$ ,  $dP^k = \{(dp^k)_i = 3^k(p_{i+1}^k - p_i^k) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ .

一般地, 将  $S$  的  $n$  阶差商格式记为  $S_n$ , 其掩模为  $a^{(n)} = \{a_i^{(n)} \mid i \in \mathbb{Z}\}$ , 则  $S_n$  的生成多项式为:

$$a^{(n)}(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^{(n)} z^i = \left( \frac{3z^2(1-z)}{1-z^3} \right) a(z)$$

**定理 3**<sup>[5]</sup> 若三重细分格式  $S$  的掩模  $a = \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$  及其差商格式  $S_j (j = 1, 2, \dots, n+1)$  的掩模  $a^{(j)} = \{a_i^{(j)} \mid i \in \mathbb{Z}\}$  满足:

$$\begin{cases} \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{3i} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{3i+1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{3i+2} = 1 \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{3i}^{(j)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{3i+1}^{(j)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{3i+2}^{(j)} = 1, (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

且存在正整数  $L$  满足  $\left\| \left( \frac{1}{3} S_{n+1} \right)^L \right\| < 1$ , 则三重细分格式  $S$  是  $C^n$  连续的, 其中:

$$\left\| \left( \frac{1}{3} S_{n+1} \right)^L \right\|_{\infty} = \max \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} |b_{i-3^L j}^{[L]}| \mid 0 \leq i < 3^L \right\}$$

$$b^{[L]}(z) = b(z)b(z^3) \cdots b(z^{3^{L-1}}), b(z) = \frac{1}{3} a^{(n+1)}(z)$$

特别地, 当  $L=1$  时,

$$\left\| \frac{1}{3} S_{n+1} \right\|_{\infty} = \frac{1}{3} \max \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_{3i}^{(n+1)}|, \sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_{3i+1}^{(n+1)}|, \sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_{3i+2}^{(n+1)}| \right\}.$$

## 3 混合型三重细分格式的构造

Dyn 等<sup>[4]</sup> 提出四点二重插值细分格式, 并给出了几何解释. 随之, Hassan 等<sup>[5]</sup> 构造了四点三重插值细分格式. 本节以四点二重插值细分格式的几何解释为基础, 对四点三重插值细分格式的几何意义进行分析, 改造格式使其融合逼近细分, 进而得到一类混合型三重细分格式.

### 3.1 四点二重插值细分法的几何解释

文献[4]中提出的四点二重插值细分格式定义如下.

给定初始控制顶点集  $P^0 = \{p_j^0 \in \mathbb{R}^d \mid j \in \mathbb{Z}\}$ , 设  $P^k = \{p_j^k \in \mathbb{R}^d \mid j \in \mathbb{Z}\}$  为第  $k (k \geq 0, k \in \mathbb{Z})$  次细分后的控制顶点集, 则第  $k+1$  次细分后的控制顶点集  $P^{k+1} = \{p_j^{k+1} \in \mathbb{R}^d \mid j \in \mathbb{Z}\}$  可递归定义为:

$$\begin{cases} p_{2i}^{k+1} = p_i^k \\ p_{2i+1}^{k+1} = \left( \frac{1}{2} + \omega \right) (p_i^k + p_{i+1}^k) - \omega (p_{i-1}^k + p_{i+2}^k) \end{cases} \quad (2)$$

将式(2)改写为:

$$\begin{cases} p_{2i}^{k+1} = p_i^k \\ p_{2i+1}^{k+1} = \frac{1}{2} (p_i^k + p_{i+1}^k) + 2\omega \left( \frac{1}{2} (p_i^k + p_{i+1}^k) - \frac{1}{2} (p_{i-1}^k + p_{i+2}^k) \right) \end{cases} \quad (3)$$

当  $\omega=0$  时,  $p_{2i+1}^{k+1}$  是线段  $\overline{p_i^k p_{i+1}^k}$  的中点. 当  $\omega \neq 0$  时, 对线段  $\overline{p_i^k p_{i+1}^k}$  中点添加一个偏移量  $2\omega e$  得到  $p_{2i+1}^{k+1}$ , 其中,  $e$  是  $\overline{p_{i-1}^k p_{i+2}^k}$  中点到  $\overline{p_i^k p_{i+1}^k}$  中点的向量, 如图 1 所示. 可以看出  $\omega$  是张量参数, 当  $\omega$  趋于 0 时, 式(2)生成的极限曲线向着由控制顶点组成的控制多边形收紧.

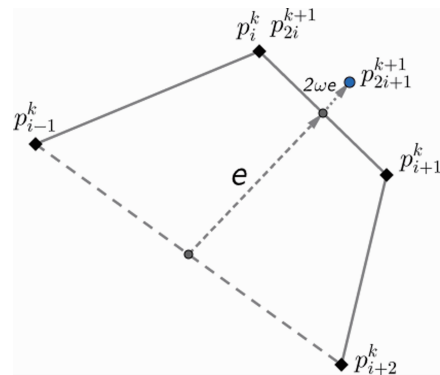


图1 式(2)的几何示意图

### 3.2 四点三重插值细分法的几何意义分析

文献[5]中提出的四点三重插值细分格式定义如下.

给定初始控制顶点集  $P^0 = \{p_j^0 \in \mathbb{R}^d \mid j \in \mathbb{Z}\}$ , 设  $P^k = \{p_j^k \in \mathbb{R}^d \mid j \in \mathbb{Z}\}$  为第  $k (k \geq 0, k \in \mathbb{Z})$  次细分后的控制顶点集, 则四点三重插值细分格式定义为:

$$\begin{cases} p_{3i}^{k+1} = p_i^k \\ p_{3i+1}^{k+1} = \left(-\frac{1}{18} - \frac{1}{6}\mu\right)p_{i-1}^k + \left(\frac{13}{18} + \frac{1}{2}\mu\right)p_i^k \\ \quad + \left(\frac{7}{18} - \frac{1}{2}\mu\right)p_{i+1}^k + \left(-\frac{1}{18} + \frac{1}{6}\mu\right)p_{i+2}^k \\ p_{3i+2}^{k+1} = \left(-\frac{1}{18} + \frac{1}{6}\mu\right)p_{i-1}^k + \left(\frac{7}{18} - \frac{1}{2}\mu\right)p_i^k \\ \quad + \left(\frac{13}{18} + \frac{1}{2}\mu\right)p_{i+1}^k + \left(-\frac{1}{18} - \frac{1}{6}\mu\right)p_{i+2}^k \end{cases} \quad (4)$$

如何构造出式(4)是一个值得探究的问题.

由四点二重插值细分格式的几何解释启发,我们试图对式(4)的几何意义进行分析,从而揭示其构造原理.

将式(4)改写为:

$$\begin{cases} p_{3i}^{k+1} = p_i^k, \\ p_{3i+1}^{k+1} = \left(\left(\frac{13}{20} + \frac{9}{20}\mu\right)p_i^k + \left(\frac{7}{20} - \frac{9}{20}\mu\right)p_{i+1}^k\right) \\ \quad + \frac{1}{9}\left(\left(\frac{13}{20} + \frac{9}{20}\mu\right)p_i^k + \left(\frac{7}{20} - \frac{9}{20}\mu\right)p_{i+1}^k\right) \\ \quad - \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu\right)p_{i-1}^k + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)p_{i+2}^k\right) \\ p_{3i+2}^{k+1} = \left(\left(\frac{7}{20} - \frac{9}{20}\mu\right)p_i^k + \left(\frac{13}{20} + \frac{9}{20}\mu\right)p_{i+1}^k\right) \\ \quad + \frac{1}{9}\left(\left(\frac{7}{20} - \frac{9}{20}\mu\right)p_i^k + \left(\frac{13}{20} + \frac{9}{20}\mu\right)p_{i+1}^k\right) \\ \quad - \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)p_{i-1}^k + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu\right)p_{i+2}^k\right) \end{cases} \quad (5)$$

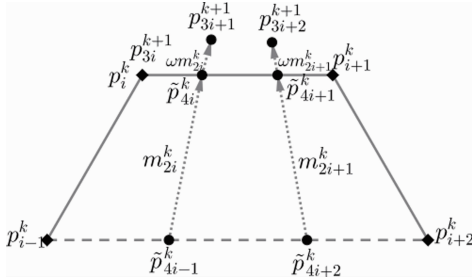


图2 式(4)的几何示意图

给定初始控制顶点集  $P^0 = \{p_j^0 \in \mathbb{R}^d \mid j \in \mathbb{Z}\}$ , 对于第  $k$  次细分控制顶点集  $P^k = \{p_j^k \in \mathbb{R}^d \mid j \in \mathbb{Z}\}$  形成的控制多边形, 在  $p_i^k$  和  $p_{i+1}^k$  之间插入中间点  $\left(\frac{13}{20} + \frac{9}{20}\mu\right)p_i^k + \left(\frac{7}{20} - \frac{9}{20}\mu\right)p_{i+1}^k$  和  $\left(\frac{7}{20} - \frac{9}{20}\mu\right)p_i^k + \left(\frac{13}{20} + \frac{9}{20}\mu\right)p_{i+1}^k$ , 分别记作  $\tilde{p}_{4i}^k$  和  $\tilde{p}_{4i+1}^k$ ; 在  $p_{i-1}^k$  和  $p_{i+2}^k$  之间插入中间点  $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu\right)p_{i-1}^k + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)p_{i+2}^k$  和  $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mu\right)p_{i-1}^k + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu\right)p_{i+2}^k$ , 分别记作  $\tilde{p}_{4i-1}^k$  和  $\tilde{p}_{4i+2}^k$ ; 对  $\tilde{p}_{4i}^k$  和  $\tilde{p}_{4i+1}^k$  分别添加偏移量  $\omega m_{2i}^k$  和  $\omega m_{2i+1}^k$ , 其中  $m_{2i}^k$  和  $m_{2i+1}^k$  分别为从  $\tilde{p}_{4i-1}^k$  到  $\tilde{p}_{4i}^k$  的向量和从  $\tilde{p}_{4i+1}^k$  到  $\tilde{p}_{4i+2}^k$  的向量, 得到  $p_{3i+1}^{k+1}$

$p_{3i+2}^{k+1}$ , 如图2所示. 保持  $p_i^k$  不变, 记作  $p_{3i}^{k+1}$ , 得到四点三重插值细分格式.

### 3.3 构造混合型三重细分格式

上述四点三重插值细分格式几何意义的分析过程可以看作格式的构造过程. 同时得到了一类带参数的四点三重插值细分格式如下:

$$\begin{cases} p_{3i}^{k+1} = p_i^k \\ p_{3i+1}^{k+1} = (\lambda p_i^k + (1-\lambda)p_{i+1}^k) + \omega((\lambda p_i^k + (1-\lambda)p_{i+1}^k) \\ \quad - (\delta p_{i-1}^k + (1-\delta)p_{i+2}^k)) \\ p_{3i+2}^{k+1} = ((1-\lambda)p_i^k + \lambda p_{i+1}^k) + \omega(((1-\lambda)p_i^k + \lambda p_{i+1}^k) \\ \quad - ((1-\delta)p_{i-1}^k + \delta p_{i+2}^k)) \end{cases}$$

即为:

$$\begin{cases} p_{3i}^{k+1} = p_i^k \\ p_{3i+1}^{k+1} = (-\omega\delta)p_{i-1}^k + (\lambda + \omega\lambda)p_i^k \\ \quad + (1-\lambda + \omega - \omega\lambda)p_{i+1}^k + (-\omega + \omega\delta)p_{i+2}^k \\ p_{3i+2}^{k+1} = (-\omega + \omega\delta)p_{i-1}^k + (1-\lambda + \omega - \omega\lambda)p_i^k \\ \quad + (\lambda + \omega\lambda)p_{i+1}^k + (-\omega\delta)p_{i+2}^k \end{cases} \quad (6)$$

进而, 将式(6)进行改造使其融合逼近细分.

对  $p_i^k$  添加偏移量  $\theta l_i^k + \eta L_i^k$ , 记作  $\bar{L}_i^k$ , 其中  $l_i^k = (p_{i-1}^k - p_i^k) + (p_{i+1}^k - p_i^k)$ ,  $L_i^k = l_{i-1}^k + l_{i+1}^k$ , 得到  $p_{3i}^{k+1}$ , 如图3所示.

故式(6)的第一个规则改写为:

$$\begin{aligned} p_{3i}^{k+1} = & p_i^k + \eta((p_{i-2}^k - p_{i-1}^k) + (p_i^k - p_{i+1}^k)) \\ & + \theta((p_{i-1}^k - p_i^k) + (p_{i+1}^k - p_i^k)) \\ & + \eta((p_i^k - p_{i+1}^k) + (p_{i+2}^k - p_{i+1}^k)) \end{aligned} \quad (7)$$

## 4 混合型三重细分法

### 4.1 混合型三重细分格式

由第3.3节可定义混合型三重细分格式如下.

**定义1** 给定初始控制顶点集  $P^0 = \{p_i^0 \in \mathbb{R}^d \mid i \in \mathbb{Z}\}$ , 设  $P^k = \{p_j^k \in \mathbb{R}^d \mid j \in \mathbb{Z}\}$  为第  $k$  ( $k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ ) 次细分后的控制顶点集, 混合型三重细分格式定义为:

$$\begin{cases} p_{3i}^{k+1} = \eta p_{i-2}^k + (-2\eta + \theta)p_{i-1}^k + (1 + 2\eta - 2\theta)p_i^k \\ \quad + (-2\eta + \theta)p_{i+1}^k + \eta p_{i+2}^k \\ p_{3i+1}^{k+1} = (-\omega\delta)p_{i-1}^k + (\lambda + \omega\lambda)p_i^k \\ \quad + (1-\lambda + \omega - \omega\lambda)p_{i+1}^k + (-\omega + \omega\delta)p_{i+2}^k \\ p_{3i+2}^{k+1} = (-\omega + \omega\delta)p_{i-1}^k + (1-\lambda + \omega - \omega\lambda)p_i^k \\ \quad + (\lambda + \omega\lambda)p_{i+1}^k + (-\omega\delta)p_{i+2}^k \end{cases} \quad (8)$$

**注1** 参数  $\eta, \theta, \lambda, \delta$  和  $\omega$  的取值决定着极限曲线的形状. 特别地,  $\eta$  和  $\theta$  控制插值性质, 当  $\eta = 0$  且  $\theta = 0$  时, 极限曲线精确通过所有控制顶点, 当  $\eta \neq 0$  或  $\theta \neq 0$  时, 极限曲线一般不通过控制顶点.  $\omega$  是张量参数, 改变  $\omega$  的取值可以调控极限曲线与控制多边形的逼近程度.  $\lambda$  和  $\delta$  则决定着每一次细分所生成新点的方位.

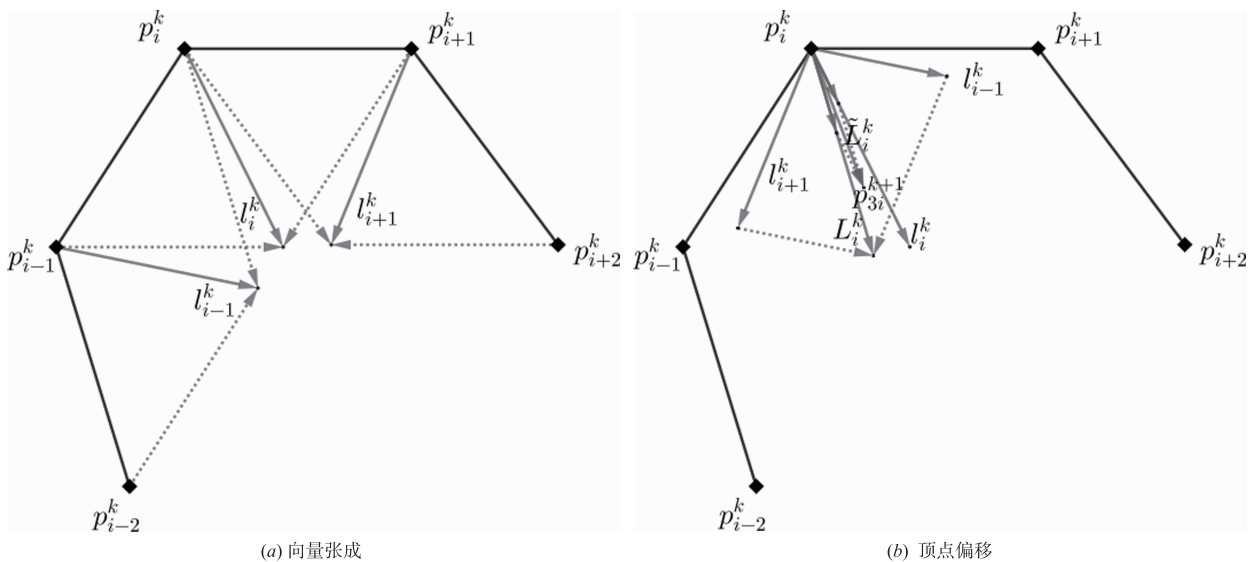


图3 式(7)的几何示意图

表 1 式(8)包含的三重细分格式

参数 $(\eta, \theta, \omega, \delta, \lambda)$	细分格式	细分类型	连续性	支撑
$(0, 0, 0, 0, \frac{2}{3})$	线性 $B$ -样条细分法	插值	$C^0$	$[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$
$(0, 0, -\alpha + \frac{1}{3}, 1, \frac{4-6\alpha}{4-3\alpha})$	Hassan 三点细分法 <sup>[8]</sup>	插值	$C^2$	$[-2, 2]$
$(0, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\alpha, \frac{13}{20} + \frac{9}{20}\alpha)$	Hassan 四点细分法 <sup>[5]</sup>	插值	$C^2$	$[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$
$(0, \frac{1}{9}, 0, 0, \frac{2}{3})$	二次 $B$ -样条细分法	逼近	$C^1$	$[-2, 2]$
$(0, \frac{4}{27}, -\frac{1}{27}, 1, \frac{8}{13})$	三次 $B$ -样条细分法	逼近	$C^2$	$[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$
$(0, \frac{5}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{5}{6}, \frac{3}{5})$	四次 $B$ -样条细分法	逼近	$C^3$	$[-3, 3]$
$(0, \frac{1}{9} - \alpha, -\beta - \gamma, \frac{\beta}{\beta + \gamma}, \frac{2 + 3\gamma - 6\beta}{3 - 3\beta - 3\gamma})$	四点混合细分法 <sup>[14]</sup>	混合	$C^2$	$[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$
$(0, \frac{4}{27}\alpha, \frac{4(1-\alpha)-1}{27}, \frac{-2+(1-\alpha)(5+3\beta)}{-2+8(1-\alpha)}, \frac{32+(1-\alpha)(7+9\beta)}{52+8(1-\alpha)})$	四点混合细分法 <sup>[11]</sup>	混合	$C^2$	$[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$
$(-\alpha, 2\alpha, \frac{1}{9} + 2(1-\alpha)\beta, \frac{5+81(1-\alpha)\beta}{9+162(1-\alpha)\beta}, \frac{60+81(1-\alpha)\beta}{90+162(1-\alpha)\beta})$	四点混合细分法 <sup>[13]</sup>	混合	$C^3$	$[-3, 3]$

注 2 式(8)将插值细分和逼近细分统一到了一个格式. 当  $\eta=0$  且  $\theta=0$  时, 式(8)为插值型三重细分格式; 当  $\eta \neq 0$  或  $\theta \neq 0$  时, 式(8)为逼近型三重细分格式. 较多的参数往往给细分格式带来不确定性, 因此, 这里我们分析当给定不同的需求时, 通过选取不同的参数值, 式(8)生成不同种类的曲线. 表格 1 列出包含的经典三重细分格式. 其中  $\alpha, \beta, \gamma$  表示文献中的参数.

#### 4.2 混合型三重细分格式的连续性分析

定理 4 混合型三重细分格式(8)可以达到  $C^4$  连续.

证明 混合型三重曲线细分格式(8)的掩模为:  
 $a = (\dots, \eta, -\omega + \omega\delta, -\omega\delta, -2\eta + \theta, 1 - \lambda + \omega - \omega\lambda, \lambda + \omega\lambda, 1 + 2\eta - 2\theta, \lambda + \omega\lambda, 1 - \lambda + \omega - \omega\lambda, -2\eta + \theta, -\omega\delta, -\omega + \omega\delta, \eta, \dots)$

生成多项式为:

$$a(z) = \eta z^{-6} + (-\omega + \omega\delta)z^{-5} + (-\omega\delta)z^{-4} + (-2\eta + \theta)z^{-3} \\ + (1 - \lambda + \omega - \omega\lambda)z^{-2} + (\lambda + \omega\lambda)z^{-1} + (1 + 2\eta \\ - 2\theta) + (\lambda + \omega\lambda)z + (1 - \lambda + \omega - \omega\lambda)z^2 \\ + (-2\eta + \theta)z^3 + (-\omega\delta)z^4 + (-\omega + \omega\delta)z^5 + \eta z^6$$

易见式(8)的掩模满足式(1),从而由定理2知,式(8)的一阶差商细分格式  $S_1$  存在且一阶差商细分格式  $S_1$  的生成多项式为:

$$a^{(1)}(z) = \left( \frac{3z^2(1-z)}{1-z^3} \right) a(z) = \frac{3}{z^{-2} + z^{-1} + 1} a(z)$$

即:

$$\frac{1}{3}a^{(1)}(z) = \eta z^{-4} + (-\omega + \omega\delta - \eta)z^{-3} + (\omega - 2\omega\delta)z^{-2} \\ + (-\eta + \theta + \omega\delta)z^{-1} + (1 - \lambda - \omega\lambda + \omega\delta + \eta \\ - \theta) + (-1 + 2\lambda + 2\omega\lambda - 2\omega\delta)z + (1 - \lambda - \omega\lambda \\ + \omega\delta + \eta - \theta)z^2 + (-\eta + \theta + \omega\delta)z^3 + (\omega \\ - 2\omega\delta)z^4 + (-\omega + \omega\delta - \eta)z^5 + \eta z^6$$

可知一阶差商细分格式  $S_1$  的掩模为:

$$a^{(1)} = 3(\cdots\eta, -\omega + \omega\delta - \eta, \omega - 2\omega\delta, -\eta + \theta + \omega\delta, \\ 1 - \lambda - \omega\lambda + \omega\delta + \eta - \theta, -1 + 2\lambda + 2\omega\lambda - 2\omega\delta, \\ 1 - \lambda - \omega\lambda + \omega\delta + \eta - \theta, -\eta + \theta + \omega\delta, \omega - 2\omega\delta, \\ -\omega + \omega\delta - \eta, \eta \cdots)$$

则当  $\left\| \frac{1}{3}S_1 \right\|_{\infty} = \max\{|\eta| + |-\eta + \theta + \omega\delta| + |1 + \eta \\ - \theta - \lambda - \omega\lambda + \omega\delta| + |-\omega + \omega\delta - \eta|, 2|\omega - 2\omega\delta| + \\ | -1 + 2\lambda + 2\omega\lambda - 2\omega\delta |\} < 1$  时,由定理3可知,式(8)生成的极限曲线是  $C^0$  连续的.

同理,当  $\lambda = \frac{1}{1+\omega} \left( \frac{2}{3} - \omega + 3\omega\delta \right)$  时,

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{3i}^{(1)} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{3i+1}^{(1)} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{3i+2}^{(1)} = 1,$$

二阶差商细分格式  $S_2$  的生成多项式为:

$$\frac{1}{9}a^{(2)}(z) = \eta z^{-2} + (-2\eta - \omega + \omega\delta)z^{-1} + (\eta + 2\omega - 3\omega\delta) \\ + (\theta - \omega + 3\omega\delta)z + \left( \frac{1}{3} - 2\theta - 2\omega\delta \right)z^2 \\ + (\theta - \omega + 3\omega\delta)z^3 + (\eta + 2\omega - 3\omega\delta)z^4 \\ + (-2\eta - \omega + \omega\delta)z^5 + \eta z^6$$

可知二阶差商细分格式  $S_2$  的掩模为:

$$a^{(2)} = 9(\cdots, \eta, -2\eta - \omega + \omega\delta, \eta + 2\omega - 3\omega\delta, \theta - \omega + 3\omega\delta, \\ \frac{1}{3} - 2\theta - 2\omega\delta, \theta - \omega + 3\omega\delta, \eta + 2\omega - 3\omega\delta, -2\eta - \omega \\ + \omega\delta, \eta, \cdots)$$

则当  $\left\| \frac{1}{3}S_2 \right\|_{\infty} = 3\max\{|\eta| + |\theta - \omega + 3\omega\delta| + |\eta + 2\omega - \\ 3\omega\delta|, 2| -2\eta - \omega + \omega\delta| + \left| \frac{1}{3} - 2\theta - 2\omega\delta \right|\} < 1$  时,式

(8)生成的极限曲线是  $C^1$  连续的.

当  $\theta = \frac{1}{9} - \omega - 2\eta$  时,

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{3i}^{(2)} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{3i+1}^{(2)} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{3i+2}^{(2)} = 1,$$

三阶差商细分格式  $S_3$  的生成多项式为:

$$\frac{1}{27}a^{(3)}(z) = \eta + (-3\eta - \omega + \omega\delta)z + (3\eta + 3\omega - 4\omega\delta)z^2 \\ + \left( \frac{1}{9} - 4\omega - 2\eta + 6\omega\delta \right)z^3 + (3\eta + 3\omega - 4\omega\delta)z^4 \\ + (-3\eta - \omega + \omega\delta)z^5 + \eta z^6$$

可知三阶差商细分格式  $S_3$  的掩模为:

$$a^{(3)} = 27(\cdots\eta, -3\eta - \omega + \omega\delta, 3\eta + 3\omega - 4\omega\delta, \frac{1}{9} - 4\omega \\ - 2\eta + 6\omega\delta, 3\eta + 3\omega - 4\omega\delta, -3\eta - \omega + \omega\delta, \eta, \cdots)$$

则当  $\left\| \frac{1}{3}S_3 \right\| = 9\max\{2|\eta| + \left| \frac{1}{9} - 4\omega - 2\eta + 6\omega\delta \right|, \\ | -3\eta - \omega + \omega\delta| + |3\eta + 3\omega - 4\omega\delta|\} < 1$  时,式(8)生成的极限曲线是  $C^2$  连续的.

当  $\delta = \frac{2}{3} - \frac{1}{81\omega}$  时,

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{3i}^{(3)} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{3i+1}^{(3)} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{3i+2}^{(3)} = 1,$$

四阶差商细分格式  $S_4$  的生成多项式为:

$$\frac{1}{81}a^{(4)}(z) = \eta z^2 + \left( -4\eta - \frac{1}{3}\omega - \frac{1}{81} \right)z^3 + \left( 6\eta + \frac{2}{3}\omega + \frac{5}{81} \right)z^4 \\ + \left( -4\eta - \frac{1}{3}\omega - \frac{1}{81} \right)z^5 + \eta z^6$$

可知四阶差商细分格式  $S_4$  的掩模为:

$$a^{(4)} = 81(\cdots\eta, -4\eta - \frac{1}{3}\omega - \frac{1}{81}, 6\eta + \frac{2}{3}\omega + \frac{5}{81}, \\ -4\eta - \frac{1}{3}\omega - \frac{1}{81}, \eta, \cdots)$$

则当  $\left\| \frac{1}{3}S_4 \right\| = 27\max\{|\eta| + \left| -4\eta - \frac{1}{3}\omega - \frac{1}{81} \right|, \\ \left| 6\eta + \frac{2}{3}\omega + \frac{5}{81} \right|\} < 1$  时,式(8)生成的极限曲线是  $C^3$  连续的.

当  $\omega = -9\eta - \frac{2}{27}$  时,

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{3i}^{(4)} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{3i+1}^{(4)} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{3i+2}^{(4)} = 1,$$

五阶差商细分格式  $S_5$  的生成多项式为:

$$\frac{1}{243}a^{(5)}(z) = \eta z^4 + \left( -2\eta + \frac{1}{81} \right)z^5 + \eta z^6,$$

可知五阶差商细分格式  $S_5$  的掩模为:

$$a^{(5)} = 243(\cdots, \eta, -2\eta + \frac{1}{81}, \eta, \cdots),$$

则当  $\left\| \frac{1}{3}S_5 \right\| = 81\max\{|\eta|, \left| -2\eta + \frac{1}{81} \right|\} < 1$ , 即 0

$\langle \eta < \frac{1}{81}$  时,式(8)生成的极限曲线是  $C^4$  连续的.

**注 3** 在混合型三重细分格式(8)中取  $\theta = 7\eta + \frac{5}{27}, \omega = -9\eta - \frac{2}{27}, \delta = \frac{2}{3} + \frac{1}{729\eta + 6}, \lambda = \frac{15 - 243\eta}{25 - 243\eta}$  时,得到一种新的五点三重细分格式:

$$\begin{cases} p_{3i}^{k+1} = \eta p_{i-2}^k + \left(\frac{5}{27} + 5\eta\right) p_{i-1}^k + \left(\frac{17}{27} - 12\eta\right) p_i^k \\ \quad + \left(\frac{5}{27} + 5\eta\right) p_{i+1}^k + \eta p_{i+2}^k \\ p_{3i+1}^{k+1} = \left(\frac{5}{81} + 6\eta\right) p_{i-1}^k + \left(\frac{5}{9} - 9\eta\right) p_i^k + \frac{10}{27} p_{i+1}^k \\ \quad + \left(\frac{1}{81} + 3\eta\right) p_{i+2}^k \\ p_{3i+2}^{k+1} = \left(\frac{1}{81} + 3\eta\right) p_{i-1}^k + \frac{10}{27} p_i^k + \left(\frac{5}{9} - 9\eta\right) p_{i+1}^k \\ \quad + \left(\frac{5}{81} + 6\eta\right) p_{i+2}^k \end{cases} \quad (9)$$

当  $0 < \eta < \frac{1}{81}$  时,式(9)生成的极限曲线是  $C^4$  连续的.

### 4.3 混合型三重细分格式的支撑

**定理 5** 混合型三重细分格式(8)的最大支撑为 6.

**证明** 给定初始控制顶点:

$$p_i^0 = \begin{cases} 1, & i=0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

定义集合  $D_k = \left\{ \frac{i}{3^k} \mid i \in \mathbb{Z} \right\}$ ,使得对任意的  $i \in \mathbb{Z}$ ,

$p\left(\frac{i}{3^k}\right) = p_i^k$  成立.为计算细分格式的支撑,只需计算最左端和最右端所对应的参数值之间的距离.混合型三重细分格式(8)为:

$$\begin{cases} p_{3i}^{k+1} = a_{-6} p_{i-2}^k + a_{-3} p_{i-1}^k + a_0 p_i^k + a_3 p_{i+1}^k + a_6 p_{i+2}^k \\ p_{3i+1}^{k+1} = a_{-4} p_{i-1}^k + a_{-1} p_i^k + a_2 p_{i+1}^k + a_5 p_{i+2}^k \\ p_{3i+2}^{k+1} = a_{-5} p_{i-1}^k + a_{-2} p_i^k + a_1 p_{i+1}^k + a_4 p_{i+2}^k \end{cases}$$

当  $k=0$  时,由式(10)可得所有非零控制顶点为:

$$\begin{aligned} & p_{-6}^1, p_{-3}^1, p_0^1, p_3^1, p_6^1; \\ & p_{-5}^1, p_{-2}^1, p_1^1, p_4^1; \\ & p_{-4}^1, p_{-1}^1, p_2^1, p_5^1; \end{aligned}$$

最左端的非零控制顶点为  $p_{-6}^1$ ,所对应的参数值为  $-\frac{6}{3}$ ;最右端的非零控制顶点为  $p_6^1$ ,所对应的参数值为  $\frac{6}{3}$ .

当  $k=1$  时,最左端的非零控制顶点为  $p_{-6(1+3)}^2$ ,所对应的参数值为  $-\frac{6(1+3)}{3^2}$ ;最右端的非零控制顶点为

$p_{6(1+3)}^2$ ,所对应的参数值为  $\frac{6(1+3)}{3^2}$ .

以此类推,经  $k$  次细分,可得最左端的非零控制顶点为  $p_{-6(1+3+\dots+3^{k-1})}^k$ ,所对应的参数值为  $-\frac{6(1+3+\dots+3^{k-1})}{3^k}$ ;最右端的非零控制顶点为

$p_{6(1+3+\dots+3^{k-1})}^k$ ,所对应的参数值为  $\frac{6(1+3+\dots+3^{k-1})}{3^k}$ .

因此,混合型三重细分格式(8)的支撑为:

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{6(1+3+\dots+3^{k-1})}{3^k} - \left( -\frac{6(1+3+\dots+3^{k-1})}{3^k} \right) \right) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 12 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^k} \right) \right) = 12 \left( \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \right) = 6. \end{aligned}$$

**注 4** 支撑刻画了调节初始控制顶点对极限曲线的影响范围.在相同连续阶时,三重细分法的支撑比二重细分法的支撑小.运用  $2n$  点插值细分法使得极限曲线达到  $C^4$  连续,则需用十点二重插值细分法,其支撑为 18,而运用混合型三重细分法生成  $C^4$  连续曲线时支撑为 6.

## 5 数值实例

本文从几何视角出发,设计了一类混合型三重细分格式,将插值型细分和逼近型细分融为一体.该细分法生成的极限曲线既能够达到插值细分法生成极限曲线的效果,也能够达到逼近细分法生成极限曲线的效果.在给定初始控制多边形的情况下,可以通过参数的适当选取来实现对极限曲线的形状控制.图 4、图 5、图 6 和图 7 所示为利用本文方法生成极限曲线的数值实例.

如图 4 所示,当初始控制多边形为正方形时参数  $\eta, \theta, \lambda, \delta$  和  $\omega$  取不同值对极限曲线形状的影响.其中图 4(a)所示的极限曲线完全与控制多边形重合,该极限曲线对应于参数的如下选取:

$$\eta = 0, \theta = 0, \omega = 0, \delta = 0, \lambda = \frac{2}{3};$$

图 4(b)所示的极限曲线与控制多边形相切,该极限曲线对应于参数的如下选取:

$$\eta = 0, \theta = \frac{1}{9}, \omega = 0, \delta = 0, \lambda = \frac{2}{3};$$

图 4(c)所示的极限曲线精确通过控制顶点,该极限曲线对应于参数的如下选取:

$$\eta = 0, \theta = 0, \omega = \frac{1}{9}, \delta = \frac{7}{11}, \lambda = \frac{38}{55};$$

图 4(d)所示的极限曲线逼近控制多项式,该极限曲线对应于参数的如下选取:

$$\eta = \frac{1}{243}, \theta = \frac{52}{243}, \omega = -\frac{1}{9}, \delta = \frac{7}{9}, \lambda = \frac{7}{12}.$$

图4 说明混合型三重细分格式(8)即可以生成插值型极限曲线,也可以生成逼近型极限曲线.

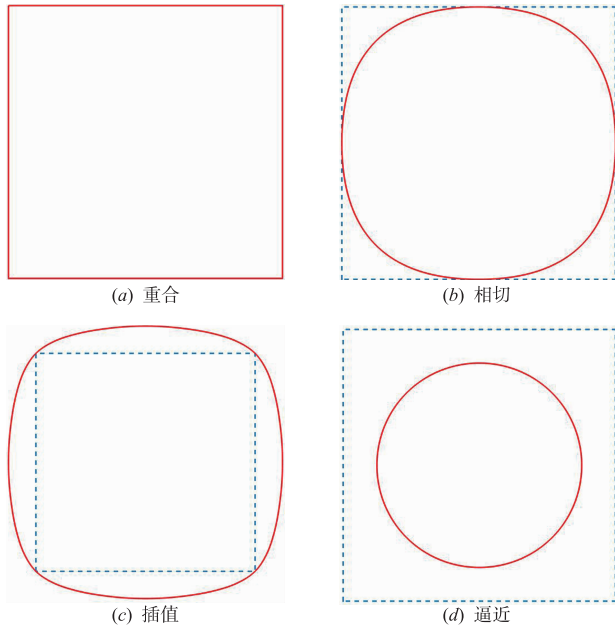


图4 式(8)中参数取不同值时对极限曲线形状的影响

如图5所示,给定初始控制多边形图5(a)十字形和图5(b)枕形,混合型三重曲线细分格式(8)当参数 $\eta, \theta, \lambda, \delta$ 和 $\omega$ 取不同值时生成的极限曲线.青色曲线

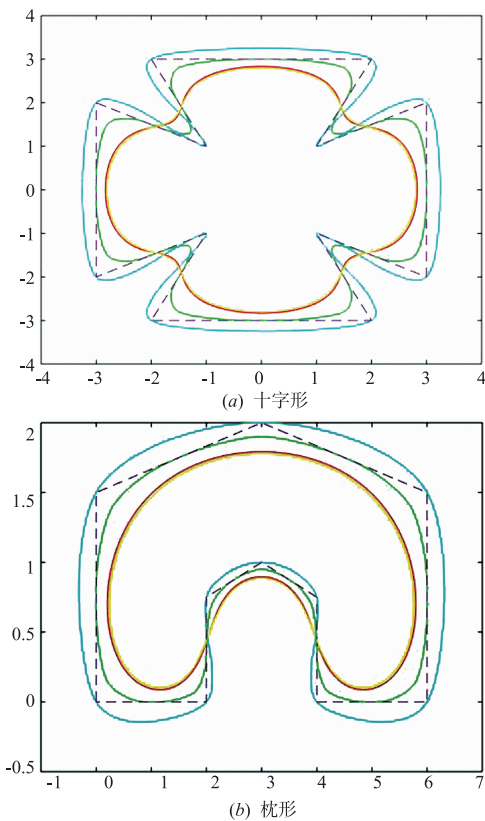


图5 式(8)中参数取不同值时生成的极限曲线

对应于如下的参数取值:

$$\eta = 0, \theta = 0, \omega = \frac{1}{9}, \delta = \frac{13}{20}, \lambda = \frac{139}{200};$$

绿色曲线对应于如下的参数取值:

$$\eta = 0, \theta = \frac{1}{12}, \omega = 0, \delta = 0, \lambda = \frac{2}{3};$$

红色曲线对应于如下的参数取值:

$$\eta = 0, \theta = \frac{5}{27}, \omega = -\frac{2}{27}, \delta = \frac{5}{6}, \lambda = \frac{3}{5};$$

黄色曲线对应于如下的参数取值:

$$\eta = \frac{1}{729}, \theta = \frac{142}{729}, \omega = -\frac{7}{81}, \delta = \frac{17}{21}, \lambda = \frac{22}{37}.$$

由图5知,通过参数 $\eta, \theta, \lambda, \delta$ 和 $\omega$ 的适当取值可以实现对极限曲线的形状控制.

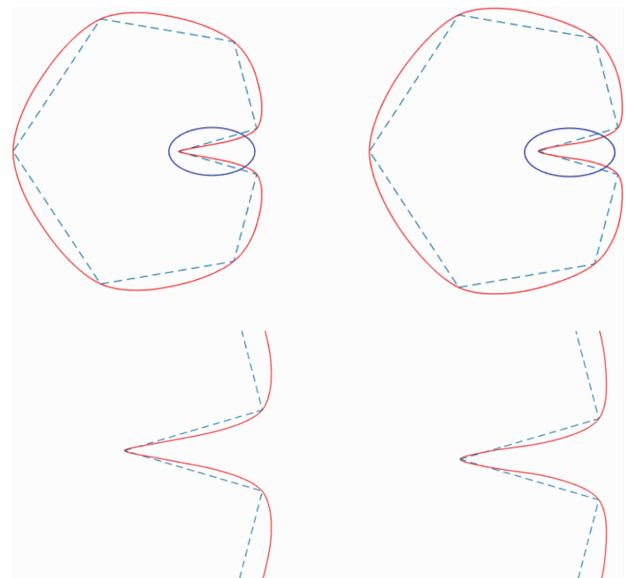


图6 式(8)插值型与四点二重细分法的比较

如图6所示,当 $\eta = 0, \theta = 0, \omega = \frac{1}{9}, \delta = \frac{7}{11}, \lambda = \frac{38}{55}$ 时,混合型三重细分格式(8)成为插值型细分,与D-D四点二重插值细分法进行比较,可见式(8)生成的极限曲线与控制多边形更紧密,能够保持细节特征.

如图7所示,当 $\eta = \frac{1}{243}, \theta = \frac{52}{243}, \omega = -\frac{1}{9}, \delta = \frac{7}{9}, \lambda = \frac{7}{12}$ 时,混合型三重细分格式(8)成为逼近型细分,与三次B-样条细分法进行比较,可见式(8)生成的极限曲线更加平滑.

如图8所示,当 $\eta = \frac{1}{243}$ 时,在不同控制多边形下由新的五点三重曲线细分格式(9)生成的 $C^4$ 连续极限曲线.图8(a)正六边形,图8(b)手形.

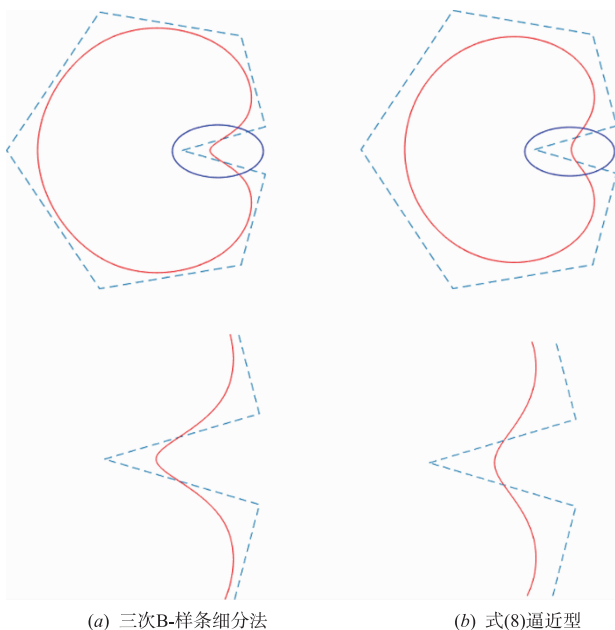


图7 式(8)逼近型与三次B-样条细分法的比较

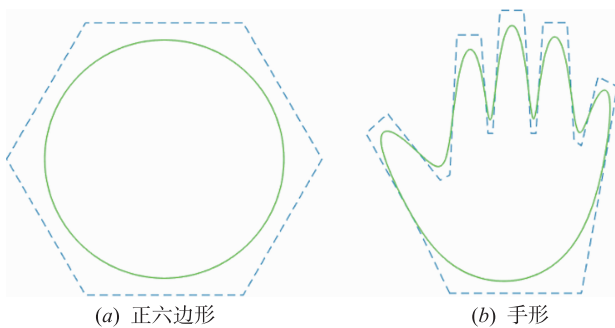


图8 式(9)生成的极限曲线

## 6 结论

本文以几何直观为驱动,设计了一类带参数的混合型三重曲线细分格式,该格式包含了大量已有的插值型细分格式和逼近型细分格式.提出了一种新的五点三重曲线细分格式,证明了其极限曲线可以达到  $C^4$  连续.通过数值实例分析了参数对极限曲线形状的影响.在未来的工作中,我们将进一步研究混合型细分法,得到高阶连续和其他优良性质相统一的细分格式,并把曲线细分推广到曲面细分.

### 参考文献

- [1] Andreas R S, Ursula H, et al. Physics-based deformation of subdivision surfaces for shared virtual worlds[J]. *Computers & Graphics*, 2018, 71(1): 66 – 76.
- [2] 邹北骥, 彭永进, 伍立华, 彭群生. 基于面分块的人脸造型技术研究[J]. *电子学报*, 2001, 29(11): 1533 – 1535.  
ZOU Bei-ji, PENG Yong-jin, WU Li-hua, PENG Qun-sheng. Research on human face modeling based on face subdivision[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2001, 29(11): 1533 – 1535. (in Chinese)
- [3] 吴晓军, 鞠光亮. 一种无标记点人脸表情捕捉与重现算法[J]. *电子学报*, 2016, 44(9): 2141 – 2147.  
WU Xiao-jun, JU Guang-liang. A markerless facial expression capture and reproduce algorithm[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2016, 44(9): 2141 – 2147. (in Chinese)
- [4] Dyn N, Levin D, Gregory J A. A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1987, 4(4): 257 – 268.
- [5] Hassan M F, Ivriissimitzis I P, Dodgson N A, Sabin M A. An interpolating 4-point  $C^2$  ternary stationary subdivision scheme[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2002, 19(1): 1 – 18.
- [6] Deslauriers G, Dubuc S. Symmetric iterative interpolation processes[J]. *Constructive Approximation*, 1989, 5(1): 49 – 68.
- [7] Deng C Y, Ma W Y. A unified interpolatory subdivision scheme for quadrilateral meshes[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2013, 32(3): 1 – 11.
- [8] Hassan M F, Dodgson N A. Ternary and three-point univariate subdivision schemes[A]. *Proceeding of Curve and Surface Fitting [C]*. Brentwood: Nashboro Press, 2003. 199 – 208.
- [9] Siddiqi S S, Ahmad N. A  $C^6$  approximating subdivision scheme[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2008, 21(7): 722 – 728.
- [10] 郑红婵, 叶正麟, 赵红星. 双参数四点细分法及其性质[J]. *计算机辅助几何设计与图形学学报*, 2004, 16(8): 1140 – 1145.  
Zheng Hongchan, Ye Zhenglin, Zhao Hongxing. A class of four-point subdivision scheme with two parameters and its properties[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2004, 16(8): 1140 – 1145. (in Chinese)
- [11] Pan J, Lin S, Luo X N. A combined approximating and interpolating subdivision scheme with  $C^2$  continuity[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2012, 25(12): 2140 – 2146.
- [12] 檀结庆, 童广悦, 张莉. 基于插值细分的逼近细分法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2015, 27(7): 1162 – 1166.  
Tan Jieqing, Tong Guangyue, Zhang Li. An approximating subdivision based on interpolating subdivision scheme[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2015, 27(7): 1162 – 1166. (in Chinese)
- [13] Rehan K, Sabri M A. A combined ternary 4-point subdivision scheme[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, 276(5): 278 – 283.
- [14] Novara P, Romani L. Complete characterization of the re-

gions of  $C^2$  and  $C^3$  convergence of combined ternary 4-point subdivision schemes[J]. Applied Mathematics Letters, 2016, 62: 84 – 91.

[15] Dyn N. Subdivision Schemes in CAGD[A]. Light W. Advances in Numerical Analysis, Vol 2 [M]. Oxford: Clarendon Press, 1992. 36 – 104.

#### 作者简介



**黄丙耀** 男, 1995 年生于安徽六安. 硕士研究生, 研究方向为计算机辅助几何设计.  
E-mail: huangbingyao@mail.hfut.edu.cn



**檀结庆(通信作者)** 男, 1962 年生于安徽望江. 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事非线性数值逼近理论与方法、科学计算可视化、计算机辅助设计、图像处理等方面的研究.  
E-mail: jieqingtan@hfut.edu.cn